mayor y menor son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la elipse a su eje focal, entonces

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2} + \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1.$$

5. Aplicando la propiedad intrínseca de la elipse, establecida en el ejercicio 4, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse.

6. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, 1)$ y $(7, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

7. Los focos de una elipse son los puntos $(-4, -2)$ y $(-4, -6)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.

8. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, -6)$ y $(9, -6)$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

9. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

10. El centro de una elipse es el punto $(-2, -1)$ y uno de sus vértices es el punto $(3, -1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

11. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

12. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando A y C son ambos positivos y $D = E = 0$.

En cada uno de los ejercicios 13-16, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determínense las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

13. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0.$
14. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$
15. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0.$
16. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$

17. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 62 trasladando los ejes coordenados.

18. Resolver el ejercicio 16 por traslación de los ejes coordenados.

* **19.** Si el centro de una elipse no está en el origen, y sus ejes son paralelos a los coordenados, demuéstrese que la ecuación de la elipse puede estar completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

* **20.** Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $\left(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $(-3, 3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

21. Hallar la ecuación de la familia de elipses que tienen un centro común $(2, 3)$, un eje focal común paralelo al eje X, y la misma excentricidad igual a $\frac{1}{2}$. Dibujar tres elementos de la familia asignando tres valores diferentes al parámetro.

22. La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(5, 1)$.

23. La ecuación de una familia de elipses es $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$. Hallar las ecuaciones de aquellos elementos de la familia que tienen una excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.

24. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto $(2, 1)$ de la elipse $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$.

25. El punto medio de una cuerda de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ es el punto $(5, 2)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual al doble de su distancia del punto $(3, 2)$.

27. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

28. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

29. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto que se mueve de manera que el producto de las tangentes de los ángulos de las bases es siempre igual a 4.

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias $x^2+y^2 - 4y - 12 = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$. (Dos soluciones.)

63. Propiedades de la elipse. Muchas de las propiedades más importantes de la elipse están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una elipse es de segundo grado, sus tangentes pueden determinarse empleando la condición para la tangencia estudiada en el Artículo 44. El procedimiento para la resolución de problemas relativos a tangentes a la elipse es, por lo tanto, idéntico al usado para la circunferencia (Art. 45) y la parábola (Art. 57). Por esto, se deja como ejercicio el demostrar los teoremas 4 y 5 que enunciamos a continuación:

TEOREMA 4. *La tangente a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *en cualquier punto* $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva tiene por ecuación*

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

TEOREMA 5. *Las ecuaciones de las tangentes de pendiente* m *a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$